Tentamen Analyse op Variëteiten

23 augustus 2011, 9:00-12:00 uur.

Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven. Per opgave is het maximaal aantal te behalen punten aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1. (20 pt.)
Gegeven zijn C^1-functies $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ met nulverzameling M, d.w.z.,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}.$$

De gradiënten van g en h zijn onafhankelijk op M (d.w.z., voor $p \in M$ is het stelsel $\{\nabla g(p), \nabla h(p)\}$ onafhankelijk).

1. Toon aan dat M een 1-dimensionale deelvariëteit is van $\mathbb{R}^3$.

De functie $f : M \to \mathbb{R}$ is de beperking van de C^1-functie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tot M.

2. Toon aan dat f een kritiek punt heeft in $p \in M$ d.e.s.d. als er $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zijn met $\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p) + \mu \nabla h(p)$.

Opgave 2. (20 pt.)
Welke van de volgende afbeeldingen $\omega : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ is een 2-vorm? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

1. $\omega(X, Y) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$, voor $X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y} + X_3\frac{\partial}{\partial z}$ en $Y = Y_1\frac{\partial}{\partial x} + Y_2\frac{\partial}{\partial y} + Y_3\frac{\partial}{\partial z}$.

2. $\omega(X, Y) = (X \times Y) \cdot N$, voor een constant vectorveld $N = N_1\frac{\partial}{\partial x} + N_2\frac{\partial}{\partial y} + N_3\frac{\partial}{\partial z}$. Hier is $\cdot$ het inproduct en $\times$ het uitproduct op $\mathbb{R}^3$.

Als ω onder (1) of (2) een 2-vorm is, schrijf deze dan in de vorm

$$\omega = \omega_1\, dy \wedge dz + \omega_2\, dx \wedge dz + \omega_3\, dx \wedge dy$$

voor geschikte functies $\omega_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Z.O.Z.

Opgave 3. (25 pt.)
De 2-vorm ω op $\mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\omega = F_1\, dy \wedge dz - F_2\, dx \wedge dz + F_3\, dx \wedge dy. \tag{1}$$

1. Toon aan dat ω exact is d.e.s.d. als

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0.$$

2. Een functie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ heet homogeen van de graad k als

$$F(tx, ty, tz) = t^k\, F(x, y, z), \tag{2}$$

   voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en $t \in \mathbb{R}$. Toon aan dat voor zo'n functie geldt:

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} + y\,\frac{\partial F}{\partial y} + z\,\frac{\partial F}{\partial z} = k\, F.$$

   Hint: differentiëer beide leden van (2) naar t.

3. De functies F_1, F_2 en F_3 zijn homogene functies van de graad k, en voldoen aan (1). Toon aan dat $\omega = d\sigma$, waarbij

$$\sigma = \frac{1}{k+2}\big(F_1\,(y\,dz - z\,dy) + F_2\,(z\,dx - x\,dz) + F_3\,(x\,dy - y\,dx)\big).$$

Opgave 4. (25 pt.)
De 2-vorm ω op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ is gegeven door

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy).$$

1. Toon aan dat ω gesloten is.

2. Toon aan dat $\int_{\mathbb{S}^2} \omega \neq 0$.

   Hint: merk op dat ω op $\mathbb{S}^2$ gelijk is aan de 2-vorm η gegeven door

$$\eta = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy.$$

3. Bewijs dat ω niet exact is.

Uitwerking

Opgave 1 (10+10 pt.)
1. Let $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be given by $G(x, y, z) = (g(x, y), h(x, y))$, then $M = G^{-1}(0, 0)$. The derivative $D_pG : T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ at $p \in M$ has matrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Since at $p \in M$ the rows of this matrix are independent, D_pG has maximal rank at every point of M. Therefore, M is a 1-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^3$.

2. The tangent space T_pM is the (one-dimensional) kernel of D_pG, which is spanned by $\nabla g(p) \times \nabla h(p)$. Furthermore, p is a critical point of f iff $D_pf(v) = 0$ for all $v \in T_pM$, iff $D_pF(v) = 0$, for all $v \in T_pM$ iff $\nabla F(p) \cdot (\nabla g(p) \times \nabla h(p)) = 0$. In other words, iff $\nabla F(p)$ is a linear combination of $\nabla g(p)$ and $\nabla h(p)$.

Opgave 2 (10+10 pt.)
1. If ω is a 2-form, then $\omega(X, X) = 0$ for all vector fields X. However, $\omega(X, X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, which is not identically zero. Therefore, ω is not a 2-form

2. $\omega(X, Y) = \det(N, X, Y) = \iota_N\Omega$, where Ω is the standard volume form on $\mathbb{R}^3$. In particular, Ω is a 2-form. Furthermore,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})\, dy \wedge dz + \omega(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z})\, dx \wedge dz + \omega(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\, dx \wedge dy \\ &= N_1\, dy \wedge dz - N_2\, dx \wedge dz + N_3\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Opgave 3 (7+8+10 pt.)
1. Use Poincaré's Lemma to show that ω is exact iff $d\omega = 0$. The claim then follows from a short computation showing that

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

2. Differentiate with respect to t:

$$x\, \frac{\partial F}{\partial x}(tx, ty, tz) + y\, \frac{\partial F}{\partial y}(tx, ty, tz) + z\, \frac{\partial F}{\partial z}(tx, ty, tz) = kt^{k-1}\, F(x, y, z).$$

Now put $t = 1$.

3. The exterior derivative of σ is of the form

$$d\sigma = \sigma_1\, dy \wedge dz - \sigma_2\, dx \wedge dz + \sigma_3\, dx \wedge dy.$$

First we show that $(k+2)\,\sigma_1$ is equal to F_1. A direct computation shows that the coefficient of $dy \wedge dz$ in $(k+2)\,d\sigma$ is equal to

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(yF_1) + \frac{\partial}{\partial z}(zF_1) - \frac{\partial}{\partial y}(xF_2) - \frac{\partial}{\partial z}(xF_3) \\
=&2F_1 + y\frac{\partial F_1}{\partial y} + z\frac{\partial F_1}{\partial z} - x(\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}) \\
=&(k+2)\,F_1 - x\,(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}) \\
=&(k+2)\,F_1.
\end{aligned}
$$

In other words, $\sigma_1 = \dfrac{1}{k+2}\,F_1$. Similar identities hold for σ_2 and σ_3.

Opgave 4 (8+9+8 pt).
1. A straightforward calculation shows that $d\omega = 0$.

2. Using the hint we derive

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} \omega &= \int_{\partial \mathbb{B}^3} \eta \\
&= \int_{\mathbb{B}^3} d\eta \\
&= 3 \int_{\mathbb{B}^3} dx \wedge dy \wedge dz \\
&= 3 \text{ Volume}(\mathbb{B}^3) \\
&= 4\pi \\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

3. Assume ω is exact, say $\omega = d\sigma$ for a 1-form σ on $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Then $\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma = \int_{\partial \mathbb{S}^2} \sigma = 0$, because $\partial \mathbb{S}^2 = \emptyset$.